高等代数 I 小测验 1

B 卷

2024 年 10 月 17 日

满分: 50 分

1. (10 分) 求解以下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}.$$

2. (15 分) 简答题. 请直接写出下列问题的答案. (不需要给出解题过程或解释理由.)

   (a) 设集合 X, Y, Z 满足 $|X| = |Y| = 2$, $|Z| = 3$. 则从 X 到 $\mathrm{Map}(Y, Z)$ 的单射共有 _____ 个.

   (b) 令 $A = \{1, 2\}$. 写出两个映射 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 和 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 使得 $f^{-1}(A)$ 是有限集, $g^{-1}(A)$ 是无限集.

   (c) 假设 K 是 $\mathbb{C}$ 的子域, 且存在 $a \in K$ 满足 $a^2 + a + 1 = 0$. 则下列结论一定成立的是 _____. (正确选项不一定只有一个.)

   (A) 方程 $x^2 + 9 = 0$ 在 K 中有解.

   (B) 如果 $\mathbb{R}$ 是 K 的子域, 则必然 $K = \mathbb{C}$.

   (C) 如果映射 $f : K \to \mathbb{R}$ 满足

   $$f(x+y) = f(x)+f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{对任意 } x, y \in K \text{ 成立},$$

   则 f 一定是常值映射.

   (D) 映射 $g : K \to K; x \mapsto x^3$ 一定不是单射.

3. (10 分) 判断正误. 正确的请解释理由, 错误的请举出反例.

(a) 若线性方程组 $AX=b_1$ 和 $AX=b_2$ 均有解, 则 $AX=b_1+b_2$ 也有解.

(b) 设 f,g,h 都是非空集合 X 到自身的映射. 如果 $h=g\circ f$, 并且 f 是满射, g 是单射, 则 h 一定是可逆映射.

4. (9 分) 设 $f:X\to Y$ 为两个非空集合之间的映射. 证明下列陈述等价:

(i) f 是单射.

(ii) 对于 X 的任意子集 A 均有 $f^{-1}(f(A))=A$.

(iii) 对于 X 的任意子集 A,B 均有: $f(A)\cap f(B)=\emptyset$ 成立当且仅当 $A\cap B=\emptyset$ 成立.

5. (6 分) 设 K 为 $\mathbb{C}$ 的一个子域. 证明: 如果对任意 $x\in K$ 均有 $x^3\in\mathbb{Q}$, 则 $K=\mathbb{Q}$.

高等代数 I 小测验 2
B 卷

2024 年 11 月 28 日

满分: 50 分

1. (8 分) 求以下齐次线性方程组的一个基础解系:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0 \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0 \\ 9x_1 \qquad\quad +x_3-2x_4=0 \end{cases}.$$

2. (15 分) 简答题. 请直接写出下列问题的答案. (不需要给出解题过程或解释理由.)

   (a) 设 L 是空间中方程为 $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$ 的直线, Π 是包含直线 L 且经过点 $P(0,3,-1)$ 的平面. 求 Π 的一般方程 (即, 形如 $ax+by+cz+d=0$ 的方程).

   (b) 设 $V=\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, $W=\mathbb{C}$. 请写出 $\mathbb{R}$-向量空间 $V\times W$ 的一组基.

   (c) 考虑 $\mathbb{R}$-向量空间 $V=\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ 中的子空间 $U=\{f\in V \mid f(1)=f'(1)=0\}$. 请写出 U 在 V 中的一个直和补.

3. (10 分) 判断正误. 正确的请解释理由, 错误的请举出反例.

   (a) 设 U, W 是向量空间 V 的子空间. 如果 $U+W$ 是直和, 则对于 V 的任意子空间 M, $(U\cap M)+(W\cap M)$ 也是直和.

   (b) 假设向量空间 V 是无限维的. 则对于 V 中的任意 (由有限多个向量构成的) 向量组 S 均有 $V\neq \operatorname{span}(S)$.

4. (5 分) 证明或举出反例: 若 L, M 都是向量空间 V 中的仿射集, 则 $L\cup M$ 也是 V 中的仿射集.

5. (12 分) 设 m, n 为正整数, $A, B\in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) 证明: $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

(b) 举例说明: $\operatorname{rank}(A+B) < \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$ 和 $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$ 的情况均有可能出现.

(c) 证明以下陈述等价:

   i. 等式 $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$ 成立.

   ii. 存在方程组 $AX=0$ 的一个基础解系 S 和方程组 $BX=0$ 的一个基础解系 T 使得 $\mathbb{R}^{n\times 1} = \operatorname{span}(S\cup T)$, $S\cap T$ 构成 $(A+B)X=0$ 的基础解系.

高等代数 I 小测验 3

B 卷

2024 年 12 月 19 日

满分: 50 分

1. (15 分) 简答题. 请直接写出下列问题的答案. (不需要给出解题过程或解释理由.)

   (a) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 3 & 4 & & \\ & & 4 & 3 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 1 & 2 \\ & & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 请写出一个可逆矩阵 $P \in \mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ 使得 $P^{-1}AP = A'$.

   (b) 写出两个不同的 $\mathbb{R}$-线性映射 T, $S : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ 使得 $T(X-1) = S(X-1) = I_2$, $T(X^2) = S(X^2) = -I_2$.

   (c) 举例说明: 当 V 是无限维向量空间时, 一个线性变换 $T : V \to V$ 可以是单射但不是满射.

2. (10 分) 判断正误. 正确的请解释理由, 错误的请举出反例.

   (a) 对于实向量空间 $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ 和 $W = \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, 存在 $\mathbb{R}$-线性映射 $T : V \to W$ 使得 $\operatorname{Ker}(T) \cong \operatorname{Im}(T)$.

   (b) 设 $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ 和 $\mathcal{C} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 是列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的两组有序基, P 是从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{C}$ 的过渡矩阵. 则线性映射 $f_P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Px$ 能使 $f_P(v_i) = \eta_i$ 对每个 $i = 1, 2, 3$ 成立.

3. (10 分) 考虑 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\mathscr{A} : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 3}; \quad f(X) \longmapsto f'(X) - f'(0)X^2.$$

   (a) 求 $\operatorname{rank}(\mathscr{A})$ 并给出 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})$ 的一组基.

   (b) 令 $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. 求矩阵 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathscr{A})$.

4. (5 分) 设 $\mathscr{A}$ 是有限维向量空间 V 上的线性变换.

   证明: 存在线性变换 $\mathscr{B} \in \operatorname{End}(V)$, 使得 $\mathscr{A}\mathscr{B} = 0$ 且 $\operatorname{rank}(\mathscr{A}) + \operatorname{rank}(\mathscr{B}) = \dim V$.

5. (10 分) 设 $\mathscr{A}$ 是实向量空间 V 上的线性变换. 假设 $\mathscr{A}^2 = 2\mathscr{A}$.

(a) 证明: $V = \mathrm{Ker}(\mathscr{A}) \oplus \mathrm{Ker}(2I - \mathscr{A})$.

(b) 证明: 若 V 是有限维的, 则 $\mathrm{rank}(\mathscr{A}) + \mathrm{rank}(\mathscr{A} - 2I) = \dim V$.

(c) 证明: 不存在直和分解 $V = U \oplus W$ (其中 U, W 是 V 的子空间) 使得 $W \neq 0$ 并且 $\mathscr{A}$ 是平行于 U 投向 W 的投影映射.

高代 I 小测 1

B卷 甘 2024.10.17

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ & 2 & 2 & 1 & -1 \\ & 5 & 2 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ & 1 & -2 & -1 & 3 \\ & 0 & 12 & 6 & -14 \\ & 0 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ & 1 & -2 & -1 & 3 \\ & & 6 & 3 & -7 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

令 $x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$.

则 $x_3 = -\frac{1}{6}(7+3s)$

$x_2 = \frac{2}{3}$, $x_1 = \frac{31}{6} + \frac{s}{2}$

2. a) $|Map(Y,Z)| = 3^2 = 9$. $X \to Map(Y,Z)$ 的单射数为 $A_9^2 = 72$

b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}: x \to x$. $f^{-1}(A) = A$

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}: x \to 2\sin(\frac{\pi}{2}x)$. $g^{-1}(A) = \{1+4k : k \in \mathbb{Z}\}$

c) ABCD

+C =S

~~A. 考虑集合 $\{a+b\omega : a,b \in \mathbb{Q}\}$, $\omega = e^{\frac{i2\pi}{3}}$. 则 S 是一个域.~~

~~方程 $x^2+9=0$ 在 $\mathbb{C}$ 中有解 $3i$ 与 $-3i$.~~

A. 考虑集合 $\{a+b\omega+c\omega : a,b,c \in \mathbb{Q}\} =: S$, 其中 $\omega = e^{\frac{i2\pi}{3}}$.

易证 S 是一个域.

方程 $x^2+9=0$ 在 $\mathbb{C}$ 中的解为 $x = \pm 3i$. 可证这两个均不在 S 中.

B 令 $a \in K$ 且 $a^2+a+1=0$. 则 $(a+\frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$, 即 $[\frac{2}{\sqrt{3}}(a+\frac{1}{2})]^2 = -1$.

由于 $\mathbb{R} \subseteq K$, $a \in K$, $\frac{2}{\sqrt{3}}(a+\frac{1}{2}) \in K$. 故 $i \in K$. 所以 $\mathbb{C} = K$.

C. 若映射 $f: K \to \mathbb{R}$ 满足题述两式. 则有 $f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

且 $f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 0$ 或 1.

当 $f(1) = 1$ 时, $f(a^2+a+1) = f^2(a) + f(a) + 1 = 0$. 易知, $f(a)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无解.

故 $f(1)=0$. 此时 $\forall x\in K$, $f(x)=f(1)\cdot f(x)=0$

故 f 为常值函数.

D. 考虑 $g(a^2)$ 与 $g(a)$.

$g(a)=a^3=a(-a-1)=-(a^2+a)=1$.

$g(a^2)=a^6=a^3\cdot a^3=1=g(a)$

而 $a\neq a^2$ (不然, $a^2+a+1=2a+1=0$, $a=-\frac{1}{2}$, 矛盾)

故 g 一定不是单射.

3. a) 若 $AX_1=b_1$, $AX_2=b_2$, 则 $A(X_1+X_2)=b_1+b_2$. 故有解.

b) 取 $X=\mathbb{Z}$, $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$; $x\mapsto\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$, $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}: x\mapsto x$.

此时 $h=g\circ f$; $x\mapsto\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$. 不单. 故不可逆.

4. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\forall A\subseteq X$, $\forall x\in f^{-1}(f(A))$, $\exists b\in f(A)$ s.t. $f(x)=b$.

由于 $b\in f(A)$, $\exists a\in A$, s.t. $f(a)=b$

故 $b=f(a)=f(x)$. 由 f 单, $x=a\in A$.

反过来, $\forall x\in A$, $f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(\{f(x)\})\subseteq f^{-1}(f(A))$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 不妨设 A,B 均非空 (若为空, 结论显然成立)

若有 $f(A)\cap f(B)=\phi$. 反设 $A\cap B\neq\phi$, 则 $\exists x\in A\cap B$.

则 $f(x)\in f(A)$. $f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cap f(B)$. 矛盾!

若有 $A\cap B=\phi$. 由 (ii). $f^{-1}(f(A))\cap f^{-1}(f(B))=\phi$.

反设 $f(A)\cap f(B)\neq\phi$. 则 $\exists y\in f(A)\cap f(B)$. 且 $f^{-1}(y)\neq\phi$.

此时, 必 $f^{-1}(y)\subseteq f^{-1}(f(A))$, $f^{-1}(y)\subseteq f^{-1}(f(B))$. 与假设矛盾!

综上, 若有(ii), 则 $f(A)\cap f(B)=\phi\Leftrightarrow A\cap B=\phi$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 反设 f 不单, 即有 $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$.

取 $A=\{x_1\}$, $B=\{x_2\}$, 此时有, $A\cap B=\phi$,

$f(A)\cap f(B)\neq\phi$ ($f(x_1)=f(x_2)\in f(A)\cap f(B)$), 故矛盾.

5. 若K为$\mathbb{C}$的子域，则$\mathbb{Q}\subseteq K$，

假设$\exists a\in K$，但是$a\notin \mathbb{Q}$.

a^3

则 $(a+1)^3$ 与 $(a-1)^3$ 均属于$\mathbb{Q}$

故有 $6a=(a+1)^3+(a-1)^3-2a^3\in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow a\in \mathbb{Q}$，矛盾！

故$K=\mathbb{Q}$.

高等代数I小测2

B卷 2024.11.28

1. 求基础解系

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0 \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0 \\ 9x_1+x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

解：$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 9 & & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ & -3 & 8 & -7 \\ & -6 & 16 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ & -3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

令 x_3, x_4 为自由变量，则有基础解系：

$$\left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{3}, 1, 0\right), \left(\frac{2}{9}, -\frac{7}{3}, 0, 1\right)$$

2. a) $L: \frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$，$\pi$ 包含 L 且过点 $P(0,3,-1)$，求 π 的一般方程.

解：$\vec{v}_1=(-1,3,4)$，$\vec{v}_2=(2,-3,0)$，令 π 的法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，则有

$$\begin{cases} -a+3b+4c=0 \\ 2a-3b=0 \end{cases}$$，令 $a=3$，则有 $\vec{n}=(3,2,-\frac{3}{4})$

π: $3(x-0)+2(y-3)-\frac{3}{4}(z+1)=0 \Leftrightarrow 12x+8y-3z-27=0$

b) $V=\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$，$W=\mathbb{C}$，写出 $\mathbb{R}$ 空间 $V\times W$ 的一组基.

解：V 的一组基为 $1, X, X^2$，W 的一组基为 $1, i$.

故 $(1,0),(X,0),(X^2,0),(0,1),(0,i)$ 为 $V\times W$ 的一组基.

c) $V=\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$，$U=\{f\in V: f(1)=f'(1)=0\}$，写出 U 在 V 中的直和补.

解：$U=\{A(x-1)^2: A\in\mathbb{R}[X]_{\leq 1}\}$ 故 $W=\mathrm{span}\{1, x-1\}$ 是其一个直和补.

3. 判断正误

a) $U, W<V$，$U+W$ 是直和，则 $\forall M<V$，$(U\cap M)+(W\cap M)$ 也是直和

T. 若 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1'+\alpha_2'$，$\alpha_1, \alpha_1'\in U\cap M\subseteq U$，$\alpha_2, \alpha_2'\in W\cap M\subseteq W$.

由 $U+W$ 是直和，$\alpha_1=\alpha_1'$，$\alpha_2=\alpha_2'$.

b) 设V是无限维的. 则$\forall S\subseteq V$, $|S|<\infty$, 均有 $V\neq \text{span}(S)$.

T. $\dim(\text{span}\,S)\leq |S|<\infty$, 故 $\text{span}\,S<V$ 但不能相等.

4. 证明或举反例, 若L, M都是V中的仿射集, 则$L\cup M$也是V中仿射集.

F. 反例. $V=\mathbb{R}^2$, $L=\mathbb{R}\times\{0\}$, $M=\{0\}\times\mathbb{R}$,

$$L\cup M=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a,b\text{至少一个为零}\}.$$

若 $L\cup M=\alpha+U$, $\alpha\in\mathbb{R}^2$, $U<\mathbb{R}^2$.

则 $(1,0)=(2,0)-(1,0)\in U$

$(0,1)=(0,2)-(0,1)\in U$

$\Rightarrow U=\mathbb{R}^2$, 而 $L\cup M\neq\mathbb{R}^2$.

故$L\cup M$不是仿射集

5. $A, B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

a) 证: $\text{rank}(A+B)\leq\text{rank}(A)+\text{rank}(B)$

b) 举例: $\text{rank}(A+B)\substack{<\\=}\text{rank}(A)+\text{rank}(B)$ 均可出现

c) TFAE: i) $\text{rank}(A+B)=\text{rank}A+\text{rank}B$

ii) $\exists$方程组 $AX=0$的基础解系S 和 $BX=0$的一个基础解系T, 使得 $\mathbb{R}^{n\times 1}=\text{span}(S\cup T)$, $S\cap T$ 构成 $(A+B)X=0$的基础解系.

证: a) $\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}A & A\\ & B\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A & A+B\\ & B\end{pmatrix}$.

$\text{rank}(A)+\text{rank}(B)=\text{rank}\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix}A & A+B\\ & B\end{pmatrix}\geq\text{rank}(A+B)$

b) "<" $A=B=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}$, $\text{rank}(A+B)=\text{rank}(A)=\text{rank}(B)=1$.

"=" $A=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & \\ & 1\end{pmatrix}$, $\text{rank}(A+B)=2$, $\text{rank}(A)=\text{rank}(B)=1$

c) i)$\Rightarrow$ii) 记 $N(A)$ 为 $AX=0$的解空间. 则 $N(A+B)\supseteq N(A)\cap N(B)$.

于是有 $\dim N(A+B)\geq\dim(N(A)\cap N(B))=\dim N(A)+\dim N(B)-\dim(N(A)+N(B))$

化简得 $\dim(N(A)+N(B)) \geq \dim(N(A)) + \dim N(B) - \dim N(A+B)$

$$= n - \operatorname{rank} A + n - \operatorname{rank} B - (n - \operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B)$$

$$= n$$

故 $N(A)+N(B) = \mathbb{R}^{n\times 1}$.

对任意 S, T 分别为 $N(A)$ 与 $N(B)$ 中的一组基.

故 $S\cup T$ 可张成 $\mathbb{R}^{n\times 1}$，即 $\operatorname{Span}(S\cup T) = \mathbb{R}^{n\times 1}$

同时，由于上述不等式只能取等，故 $\dim N(A+B) = \dim(N(A)\cap N(B))$

即 $N(A+B) = N(A)\cap N(B)$,

取 S, T 为从 $N(A+B)$ 中的一组基 D 扩充出的一组基

则 $S\cap T = D$，即 $S\cap T$ 为 $N(A+B)$ 的一组基，故为 $(A+B)X=0$ 的基础解系

iii) ⇒ i)

$$n \leq |S\cup T| = |S| + |T| - |S\cap T| = n - \operatorname{rank}(A) + n - \operatorname{rank}(B) - (n - \operatorname{rank}(A+B))$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = \operatorname{rank}(A+B)$$

高代小测3.

2024.12.19

1. 简答题.

(a)

$$\begin{pmatrix} & I_2 \\ I_2 & \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} & I_2 \\ I_2 & \end{pmatrix} = A', \quad P = \begin{pmatrix} & I_2 \\ I_2 & \end{pmatrix}$$

(b)

$$T: \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to M_2(\mathbb{R});\ a+bX+cX^2 \mapsto -(a+c)I_2$$

$$S: \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to M_2(\mathbb{R});\ a+bX+cX^2 \mapsto (\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b-c)I_2$$

(c)

$$R: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X];\ f(X) \mapsto X\cdot f(X)$$

2. 判断题

(a) 正确: $T: a+bX+cX^2+dX^3 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

(b) 不正确 定 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为标准基，且令 ε 到 $\mathcal{B}$ 的矩阵为 A，

即 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A = (v_1, v_2, v_3)$ $\cdots (*)$

$f_P(x) = Px$ 即 $f_P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)Px$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$,

即 $f_P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)P$, 将 $(*)$ 代入上式，则有

$$f_P(v_1, v_2, v_3)A^{-1} = (v_1, v_2, v_3)A^{-1}P \text{ 即}$$

$$f_P(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3)A^{-1}PA = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)P^{-1}A^{-1}PA,$$

而 $P^{-1}A^{-1}PA$ 不一定为 I_3. 故不正确

3. (a) $1, X, X^2, X^3$ 为 $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ 的一组基. $\mathcal{A}(1, X, X^2, X^3) = (0, 1-X^2, 2X, 3X^2)$

故 $\operatorname{rank}\{0, 1-X^2, 2X, 3X^2\} = 3$. 且 $1-X^2, 2X, 3X^2$ 为 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 的一组基.

(b) $$\mathcal{A}(1, X, X^2, X^3) = (1, X, X^2, X^3)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}$$

4. 由于 V 为有限维，对于子空间 $\ker\mathcal{A}$，V 总存在直和补 W，使得 $V = W \oplus \ker\mathcal{A}$.

令 $\mathcal{B}: V \to \ker\mathcal{A}$ 为平行于 W 投向 $\ker\mathcal{A}$ 的其投影. 则有 $\operatorname{Im}\mathcal{B} = \ker\mathcal{A}$.

故 $\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{B} = \dim V$

5. (a) 证：$\forall v\in V$，$v = v-\frac{1}{2}\mathscr{A}v+\frac{1}{2}\mathscr{A}v$，其中 $v-\frac{1}{2}\mathscr{A}v\in\ker\mathscr{A}$，$\frac{1}{2}\mathscr{A}v\in\ker(2I-\mathscr{A})$

$\forall v\in\ker\mathscr{A}\cap\ker(2I-\mathscr{A})$，$0=(2I-\mathscr{A})v = 2v-\mathscr{A}v = 2v \Rightarrow v=0$

(b) 证：$\dim \mathrm{Im}\mathscr{A} + \dim \mathrm{Im}(\mathscr{A}-2I) = \dim V - \dim\ker\mathscr{A} + \dim V - \dim\ker(2I-\mathscr{A})$

$= 2\dim V - \dim V = \dim V$

(c) 若存在，$V=U\oplus W$ 使得 $\mathscr{A}$ 满足题意.

则 $\forall v\in V$，$\exists!\, u\in U$，$w\in W$，st. $v=u+w$

$\mathscr{A}^2(v) = \mathscr{A}(0+w) = w$　而 $2\mathscr{A}v = 2w$

由于 $\mathscr{A}^2 = 2\mathscr{A}$，$w=2w$，即 $w=0$.

由 v 的任意性，$W=0$. 与题设矛盾.